CONCOURS D'ADMISSION À L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1987

CONCOURS SCIENCES

Option P

MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements et de la précision de la rédaction, mais aussi de la PRÉSENTATION, *de la* LISIBILITÉ *et de* L'ORTHOGRAPHE.

Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.

La résolution du problème ne nécessite pas l'usage d'une calculatrice.

NOTATIONS :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_n$ désigne l'ensemble $\{1; 2; \ldots; n\}$.

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrees d'ordre n sur $\mathbb{C}$, ($n \in \mathbb{N}^*$), on note O_n la matrice nulle et I_n la matrice unité de cette algèbre.

Si E est un C-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. e étant une base de E et u un élément de $\mathcal{L}(E)$, on note $M(u, e)$ la matrice de u dans la base e.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note :

$A = [a_{ij}]$, où a_{ij} désigne l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne;

rg A : le rang de A; ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on note E_{ij} la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément a_{ij} de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1 (en notant $E_{ij} = [a_{pq}]$, $a_{pq} = \delta_{pi} \cdot \delta_{qj}$ où δ est l'indice de Kronecker).

On rappelle que la famille $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

I

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. $(u, v) \in \mathcal{L}^2(E)$ fixé et $\mathcal{A}_{u,v} = \{u \circ f \circ v,\ f \in \mathcal{L}(E)\}$

1. Montrer que $\mathcal{A}_{u,v}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que, pour tout φ de $\mathcal{L}(E)$,

$$\varphi \in \mathcal{A}_{u,v} \Leftrightarrow (\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} \varphi \text{ et } \operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Im} u)$$

(on rappelle qu'un endomorphisme f de E est parfaitement déterminé par la donnée des vecteurs d'une base de et de leurs images par f).

3. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans E. Montrer que les espaces vectoriels $\mathcal{A}_{u,v}$ et $\mathcal{L}(F, \operatorname{Im} u)$ sont isomorphe En déduire $\dim \mathcal{A}_{u,v}$.

II

Pour tout couple (A, B) de $\mathfrak{M}_n^2(\mathbb{C})$, on pose : $f_{A,B} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $X \longmapsto A.X.{}^tB$

1. Montrer que $f_{A,B}$ est linéaire.

Tournez la page S. V. P.

2. Montrer que $(A, B) \mapsto f_{A,B}$ est bilinéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ et que :

$$\forall\ (A, B, C, D) \in \mathfrak{M}_n^4(\mathbb{C}),\quad f_{A,B} \circ f_{C,D} = f_{AC,BD}.$$

3. En utilisant I-3., montrer que :

$$\text{rg}\ f_{A,B} = \text{rg}\ A \ .\ \text{rg}\ B.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur A et B) pour que $f_{A,B}$ soit bijectif. Indiquer dans ce cas l'expression de $f_{A,B}^{-1}$.

À quelle condition $f_{A,B}$ est-il nul?

4. Soit $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}_n^4$.

a. Montrer que $\text{rg}\ f_{E_{pq},E_{rs}} = 1$.

b. Montrer que $\forall (i, j, k, l) \in \mathbb{N}_n^4,\ E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$.

c. Montrer que E_{pr} est une base de $\text{Im}\ f_{E_{pq},E_{rs}}$.

d. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M = [m_{ij}]$.

Calculer : $f_{E_{pq},E_{rs}}(M)$.

e. Montrer que : $f_{E_{pq},I_n} \circ f_{A,B} \circ f_{E_{rs},I_n} = \lambda f_{E_{ps},B}$

où λ est un complexe que l'on explicitera en fonction des éléments de la matrice $A = [a_{ij}]$.

5. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$, $2p$ éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$, et $f = \sum_{k=1}^{p} f_{A_k,B_k}$.

a. On suppose que les p matrices $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sont linéairement indépendantes. En utilisant ce qui précède, montrer que f est l'application nulle si, et seulement si, pour tout indice $k \in \mathbb{N}_p$, $A_k = 0$.

b. Établir un résultat analogue en supposant maintenant que les p matrices $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont linéairement indépendantes.

6. Montrer que la famille $(f_{E_{ij},E_{kl}})_{(i,j,k,l) \in \mathbb{N}_n^4}$ est une base de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$.

7. Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$, f non nul, et $\mathfrak{D}f$ l'ensemble des systèmes $(A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p)$ d'éléments non nuls de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $f = \sum_{k=1}^{p} f_{A_k,B_k}$. Une telle relation définit une décomposition de f de longueur p.

a. Montrer que $\mathfrak{D}f$ est non vide.

b. Montrer que f admet une décomposition de longueur minimum μ et que si $f = \sum_{k=1}^{\mu} f_{A_k,B_k}$ est une telle décomposition, alors les μ matrices $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ (resp. $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$) sont linéairement indépendantes.

Tournez la page S. V. P.

— 3 —

III Dans cette partie, on s'intéresse à l'ensemble Γ des éléments f de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ bijectifs et tels que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{C}), \quad f(XY) = f(X) \cdot f(Y).$$

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_n$.

2. Montrer que si $f \in \Gamma$ alors $f(I_n) = I_n$.

3. Soit $f \in \Gamma$ et $f = \sum_{k=1}^{\mu} f_{A_k, B_k}$ une décomposition de f de longueur minimum.

   a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}_\mu$ et tout X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X\,{}^tB_k = {}^tB_k\, f(X)$ et $A_k\, X = f(X)\, A_k$

   en déduire, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_\mu^2$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $A_i\, {}^tB_j\, f(X) = f(X)\, A_i\, {}^tB_j$.

   b. Démontrer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_\mu^2$, $A_i\, {}^tB_j$ est une matrice scalaire, puis, que l'une au moins de ces matrices est non nulle.

   Calculer alors μ.

4. Déterminer Γ.

IV Dans cette dernière partie, on se propose de déterminer la matrice de l'application $f_{A,B}$ définie au II lorsque A et B sont des matrices carrées d'ordre 2.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2^2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

1. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}_4^2$, calculer $f_{A,B}(E_{ij})$.

2. En déduire la matrice de $f_{A,B}$ dans la base $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

   Montrer que l'on peut noter cette matrice sous la forme :

$$\begin{bmatrix} aB & cB \\ bB & dB \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice de $f_{A,B}$ dans la base $e' = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$.

4. *Application* :

   Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ tel que :

$$M(g, e) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Donner une décomposition de longueur minimum de g de la forme :

$$g = \sum_{k=1}^{\mu} f_{A_k, B_k}.$$

• • •